Actes de la XIX Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament. Barcelona, SCHCT-IEC
Ferragud, C.; Massa-Esteve, M. R. (ed.) (2023) p. 93-100
DOI: 10.2436/10.2006.05.12

ALGUNES REFLEXIONS AL VOLTANT DE L'ENSENYAMENT DE LA REGLA DEL PRODUCTE AL SEGLE XVIII: EL CAS DE *THE METHOD OF FLUXIONS, BOTH DIRECT AND INVERSE* (1730) D'EDMUND STONE

MÒNICA BLANCO
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Paraules clau: *diferenciació del producte, Edmund Stone, L'Hospital, càlcul leibnizià, càlcul newtonià.*

Some considerations on the teaching of the product rule in the 18th century: The case of *The Method of Fluxions, Both Direct and Inverse* (1730) by Edmund Stone

Summary: *In 1730 Edmund Stone (1695?-1768) published* The Method of Fluxions, Both Direct and Inverse*, the first part of which is the English translation of L'Hospital's* Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes *(1696). The* Analyse *played a fundamental role in the circulation and teaching of the Leibnizian calculus and, according to Stone, it was a clear and well adapted work for beginners. Hence, Stone undertook the translation from Leibnizian to Newtonian language, substituting the difference* dx *by the fluxion of* x*. Stone not only translated the notation, however, but also discussed fundamental concepts, such as the curve and infinitesimal quantities. The product rule was the cornerstone of the question of how to avoid vanishing infinitesimal quantities. The main aim of this paper is to show how Stone interpreted and explained the product rule in his translation of L'Hospital's* Analyse*. The study of Stone's treatment of the product rule illustrates the impact that the discussions on the nature of infinitesimal quantities had on the teaching and practice of the new calculus in the 18th century.*

Key words: *product rule, Edmund Stone, L'Hospital, Leibnizian calculus, Newtonian calculus.*

Introducció

En un article publicat el 1684 a la revista *Acta Eruditorum*, Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) donava a conèixer la invenció del seu càlcul diferencial. Hi presentava, sense justificació, les regles bàsiques, entre les quals, la regla del producte:

$$d(xv) = xdv + vdx$$

El 1696 Guillaume F. de L'Hospital (1661-1704) va publicar el primer tractat sobre el càlcul diferencial de Leibniz: *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. La publicació de l'*Analyse* va tenir un paper fonamental en el context del desenvolupament i circulació del càlcul leibnizià. La primera secció està dedicada a enunciar les definicions, les demandes o suposicions, i les regles de la diferenciació. En particular, L'Hospital demostra la regla per «prendre la différence» d'un producte xy (L'Hospital, 1696: art. 5) de la manera següent. Si la quantitat x creix i esdevé $x + dx$, la quantitat y esdevé $y + dy$, aleshores la diferència del producte és $ydx + xdy + dxdy$. Si es divideix ydx i $dxdy$ per dx, resulta y i dy, respectivament. Com que dy és infinitament menor que y, aleshores la quantitat $dxdy$ es pot negligir perquè és infinitament petita en relació amb ydx i amb xdy. Així, la diferència del producte és $ydx + xdy$. L'Hospital es recolza en la seva primera demanda (L'Hospital, 1696: art. 2) per justificar la regla de diferenciació del producte de xy: $ydx + xdy + dxdy$ i $ydx + xdy$ difereixen en una quantitat infinitament petita i, per tant, es poden considerar com iguals.

La regla del producte és representativa de les qüestions que sorgeixen al voltant de la desaparició de les quantitats infinitesimals. De fet, la publicació de l'*Analyse* provoca un debat en el context de l'Académie des Sciences (1700-1706) al voltant de l'acceptació del nou càlcul (Bella, 2018: 427-636; Blay, 1986; Mancosu, 1989). De forma molt resumida, d'una banda, un grup d'acadèmics va prendre la part del càlcul leibnizià. Aquest grup, liderat per Pierre Varignon (1654-1722) i per Joseph Saurin (1659-1737), es caracteritza per la seva acceptació de l'existència de les quantitats infinitesimals. D'altra banda, hi havia el grup conduït per Michel Rolle (1652-1719), el qual retreia la manca de rigor de la «géométrie des infiniment petits» i els resultats obtinguts a partir del nou mètode. Aquest grup preferia la geometria clàssica i defensava l'aplicació de l'àlgebra a la geometria. Una de les seves crítiques contra el càlcul leibnizià era l'ambivalència de la naturalesa dels infinitament petits: de vegades eren utilitzats com quantitats no nul·les, de vegades eren quantitats nul·les, argument que coincideix amb la crítica de Berkeley del 1734. Finalment, el càlcul leibnizià tira endavant: tot i que els fonaments eren poc clars, l'algorisme diferencial resolia amb èxit problemes inaccessibles a les tècniques algèbriques clàssiques, tal com destaca Mancosu (1989: 244).

El debat Rolle-Varignon va tenir repercussions sobre la manera d'ensenyar la regla del producte, atès que la seva demostració portava a posicionar-se en relació amb la naturalesa de les quantitats infinitesimals. La formulació de la regla del producte resulta clau en les discussions al voltant del rigor (o la manca de rigor) dels principis fonamentals del càlcul leibnizià. Com s'ensenya la regla del producte als primers manuals de càlcul diferencial? A Bella i Blanco (2018) s'estudien alguns textos que intenten explicar i clarificar l'obra de L'Hospital: els *éclaircissemens* (1725) de Pierre Varignon (1654-1722), els *commentaires* de Jean Pierre Crousaz (1656-1728) de 1721, i els d'Aimé-Henri Paulian (1722-1802) de 1768. Però la influència de l'*Analyse des infiniment petits* de L'Hospital no es limita exclusivament a França, sinó que es fa sentir a diversos manuals europeus. És el cas, per exemple, de *The method of fluxions, both direct and inverse* (1730) d'Edmund Stone (1695?-1768). Com

veurem, la primera part és la traducció anglesa de l'*Analyse* de L'Hospital, publicada trenta-quatre anys després de la seva publicació, i escrita en termes fluxionals. L'estudi d'aquest cas ens ajudarà a reflexionar sobre alguns aspectes lligats a l'ensenyament de la regla del producte i la seva relació amb els fonaments i la pràctica del càlcul.

L'objectiu de la meva contribució és mostrar com Edmund Stone tracta i demostra la regla del producte en la seva traducció de l'*Analyse* de L'Hospital. L'estudi de la demostració de la regla contribueix a il·lustrar les discussions sobre la naturalesa de les quantitats infinitesimals, tot mostrant la tensió que la consideració d'aquestes quantitats causava a l'època entre el rigor dels fonaments, la pràctica i l'ensenyament del càlcul diferencial.

The method of fluxions (1730) d'Edmund Stone

En el context britànic, el càlcul de Newton presentava diversos enfocaments, la presentació dels conceptes newtonians no era gaire clara, i el fet del decalatge cronològic entre l'elaboració i la publicació dels textos de Newton sobre el seu càlcul no ajudava. La necessitat de tractaments sistemàtics i adaptats a l'ensenyament del càlcul newtonià empeny Edmund Stone a traduir a l'anglès l'*Analyse des infiniment petits* de L'Hospital el 1730.[1] Stone era fill del jardiner de John Campbell (1680-1743), segon duc d'Argyll i de Greenwich. Al servei del duc al castell d'Inverary (Escòcia) des de ben jove, Stone aprèn matemàtiques, en particular la geometria i l'anàlisi, així com francès i llatí, de manera autodidacta. El seu coneixement del francès i del llatí li va permetre traduir i editar diverses obres matemàtiques a l'anglès (Blanco, 2015).

El 1730, Stone publica *The method of fluxions, both direct and inverse*, una introducció a la doctrina de les fluxions. La part dedicada al mètode directe és una traducció de l'*Analyse* de L'Hospital. La segona part, sobre el mètode invers, es basa principalment en l'obra pòstuma de Roger Cotes (1682-1716), *Harmonia mensurarum* (1722). En el text que precedeix l'obra pròpiament dita, «The translator to the reader» (XIII-XIX), Stone exposa per què va escollir l'obra de L'Hospital per a la part del mètode directe:

> Such a work becomes the more necessary, because there are but two English treatises on the subject, (that I know of) the one being Hays's Introduction to Mathematical Philosophy, and the other, Ditton's Institution. (Stone, 1730, «The translator to the reader»: xv)

Aquí Stone s'està referint a les dues obres següents: *A treatise of fluxions: Or an introduction to mathematical philoshophy* (1704) de Charles Hayes (1678-1760) i *An institution of fluxions* (1706) de Humphry Ditton (1675-1715). Segons Guicciardini, a la seva obra Ditton no presentava un estudi sistemàtic del mètode newtonià, era essencialment una discussió sobre la naturalesa de les fluxions, basada en el *Tractatus de quadratura curvarum* de Newton (1693, publicat el 1704 com a annex de l'*Opticks*), així com un conjunt de problemes relacionats amb les corbes isòcrones i les corbes de més ràpid descens. Segons Stone, Ditton presentava pocs exemples, que, a més, no estaven adaptats als principiants. La seva explicació de la definició de fluxió, tot i que vertadera i exacta, era massa redundant i difícil per a algú poc familiaritzat amb els infinits (Stone, 1730: XV-XVJ). En canvi, l'obra de Hayes cobria totes les qüestions amb un enfocament més elemental, tot i que, igual que passava amb Ditton, el mètode invers no era tractat de forma sistemàtica. El text de Hayes, segons Stone, era massa prolix

1. Vegeu Guicciardini (1989: 11-27).

per als principiants, amb massa regles generals i exemples poc clars, que no ajudaven a avançar en l'estudi de la matèria (Stone, 1730: xv). Guicciardini considera l'obra de Stone (1730) com el primer tractat sistemàtic en anglès dels mètodes directe i invers de Newton (Guicciardini, 1989: 16-17).

Així, la intenció de Stone era fer accessible l'*Analyse* de L'Hospital als lectors anglesos per la seva claredat i adaptació per als principiants, com afirma en la citació següent:

> […] much easier, tho less Geometrical, who calls a Differential (or Fluxion) the infinitely small part of a Magnitude; not deterring his readers at first from proceeding, by dwelling long on the explication of an intricate definition, but comes immediately to the algorithm, or arithmetic of the Art; and thence to plain Examples of Solutions by it. (Stone, 1730, «The translator to the reader»: xvj)

La traducció i interpretació de la regla del producte

En relació amb l'*Analyse* de L'Hospital, Stone fa una traducció del llenguatge leibnizià cap al llenguatge newtonià, el que es podria considerar com una conversió entre els dos sistemes. Dos sistemes que es recolzen en fonaments diferents, però que, tanmateix, comparteixen mètodes equivalents a la pràctica. Tot i no ser el mateix, Stone substitueix la diferència dx per la fluxió de $x, \dot{x}$. Es tracta d'una identificació no infreqüent a l'època, fins i tot apareix a les *Institutiones calculi differentialis* de Leonhard Euler (1755: §115). Trobem aquest tipus de traducció a altres manuals, com ara a les *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana* (1748), de Maria Gaetana Agnesi (1718-1799), un dels primers manuals de càlcul diferencial en italià. Es tracta d'un manual d'anàlisi cartesiana i de càlcul infinitesimal. Agnesi defineix la *diferència*, o *fluxió*, com la porció «infinitesima», és a dir, infinitament petita, per la qual una quantitat variable augmenta (Agnesi, 1748, II, §3: 433). L'obra d'Agnesi arriba a Anglaterra, on John Colson (1680-1760), professor lucasià de matemàtiques, la tradueix a l'anglès: *Analytical institutions, in four books*, en notació de fluxions.[2] La traducció de Colson fou publicada pòstumament per John Hellins (1749-1821) el 1801. Colson reescriu les *Instituzioni* d'Agnesi en termes fluxionals, substituint la diferència dy per la fluxió de y, $\dot{y}$, tal com havia fet Stone el 1730. En aquesta època trobem també exemples en sentit invers, traduccions del llenguatge newtonià al llenguatge leibnizià. Justament la segona part de l'obra de Stone, sobre el mètode invers, fou traduïda al francès per M. Rondet el 1735, com càlcul integral. Rondet substitueix el fluent per la integral, i la fluxió per la diferència. Així, a la secció ii, Stone diu «the fluent of $x\dot{y} + y\dot{x}$ is xy» (Stone, 1730, «Appendix»: 21), mentre que Rondet escriu: «l'intégrale de $xdy + ydx$ est xy» (Rondet, 1735: 18). És cert que aquesta substitució no és matemàticament correcta: mentre que la diferència dx és la porció infinitament petita en què la quantitat variable x augmenta o disminueix, la fluxió de x és la velocitat de la quantitat que flueix («fluent»).[3] Tanmateix, des del punt de vista pedagògic, aquesta substitució funciona, fins i tot un segle després de la publicació de l'*Analyse* de L'Hospital.

Tornant a la traducció de Stone, l'autor fa referència als infinitament petits quan demostra la regla del producte de la fluxió de xy. Demostració que és una traducció literal de la de L'Hospital, exceptuant la notació fluxional. En la traducció de Stone, $\dot{x}\dot{y}$ és una quantitat infinitament petita en relació amb $y\dot{x}$ i amb $x\dot{y}$ (Stone, 1730, secció i, part i, §5):

2. Justament fou Colson qui publicà el 1736 la traducció anglesa del mètode de fluxions i sèries infinites de Newton.
3. Un altre exemple seria el *Tratado de fluxiones* (1757-1759) de Tomàs Cerdà, analitzat a Berenguer (2021).

> To find the fluxions of the product of several quantities multiplied, or drawn into each other.
>
> 1. The fluxion of xy is $y\dot{x} + x\dot{y}$: for y becomes $y + \dot{y}$, when x becomes $x + \dot{x}$; and therefore xy then becomes $xy + y\dot{x} + x\dot{y} + \dot{x}\dot{y}$ (…) and the fluxion thereof will be $y\dot{x} + x\dot{y} + \dot{x}\dot{y}$, that is, $y\dot{x} + x\dot{y}$: because $\dot{x}\dot{y}$ is a quantity infinitely small, in respect of the other terms $y\dot{x}$ and $x\dot{y}$… (Stone, 1730: 4-5)

És interessant recordar que Stone, en línia amb el text de L'Hospital, no fa servir aquí cap figura per explicar la demostració de la regla del producte. En canvi, als seus comentaris, Crousaz i Paulian es recolzen en la figura del «rectangle» (fig. 1*a* i 1*b*, respectivament) per explicar per què *dxdy* es pot negligir (Bella i Blanco, 2018: 54-55). Així, per exemple, Paulian (1768, nota II: 260) afirma que els rectangles infinitament petits *CDop* (*ydx*) i *BmDn* (*xdy*) són infinitament més grans que el rectangle *Dnpr* o *dxdy* (fig. 1*b*). En aquest cas, Crousaz i Paulian apostaren per arguments ja debatuts, fins i tot poc rigorosos, però que, en ser geomètrics, resultaven més visuals i intuïtius i, per tant, útils a l'hora d'ensenyar el nou càlcul.

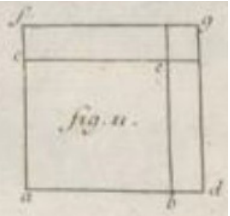

Figura 1*a*. Diagrama utilitzat per il·lustrar la regla del producte.
Font: Crousaz (1721: 21, figura 11, làmina I).

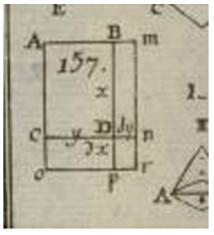

Figura 1*b*. Diagrama utilitzat per il·lustrar la regla del producte.
Font: Paulian (1768: figura 157, làmina 8).

Tanmateix, Stone no es limita a fer una traducció literal, no només fa la conversió de la notació, sinó que també adapta els conceptes fonamentals, o més aviat podríem dir que presenta un doble enfocament. Veiem, per exemple, el cas de la naturalesa de la corba. D'una banda, segons el postulat II (traducció literal del text de L'Hospital), la corba pot ser considerada com un polígon d'infinits costats infinitament petits (Stone, 1730, part I, §3). D'altra banda, en «The translator to the reader», Stone defineix la corba com descrita pel moviment continu d'un punt:

> We are to consider quantities not as made up of very small parts, but as described by a continued motion. For example, a line is described, not by the apposition of little lines or parts, but by the continual motion of a point. (Stone, 1730, «The translator to the reader»: XVJ)

Sense dir-ho explícitament, aquest fragment es basa en el *Tractatus de quadratura curvarum* de Newton (1704, «Introductio»: 3). La definició mecànica de les corbes era fonamental per als newtonians, i difereix de la concepció de la corba com un polígon presentada per L'Hospital a l'*Analyse*. De

la mateixa manera, a la traducció de Stone la definició de fluxió correspon a la de la diferència *dx*, com apareix a l'obra de L'Hospital: «The infinitely small part whereby a variable quantity is continually increased or decreased, is called the fluxion of that quantity» (Stone, 1730, part I, definició II). Però, en canvi, en «The translator to the reader» Stone defineix les fluxions com ho fa Newton en el *Tractatus de quadratura curvarum*:

> Now the velocities of the increases of increments of magnitudes thus moving in very small equal particles of time, at the first instant of the generation of those increments are called fluxions, and those magnitudes fluent, or flowing quantities. (Stone, 1730, «The translator to the reader»: XVIIJ)

Al *De quadratura* Newton no presenta explícitament la regla del producte de dos fluents. Tanmateix, el seu enfocament es pot visualitzar a la demostració de la regla del producte utilitzada per Ditton: una quantitat fluent, per exemple z, esdevé $z + o\dot{z}$, on $o\dot{z}$ és el moment de la quantitat fluent, generat en un instant de temps. Se substitueixen els termes a l'equació original, es resten les expressions, i els termes que queden en restar les dues expressions es divideixen per o (instant de temps). Finalment, s'eliminen els termes que contenen encara alguna potència de o, i d'aquesta forma s'obté la fluxió de la quantitat proposada:

> Let the Moments (or Increments of these flowing Quantities, generated in a given particle of time) be $o\dot{z}$, $o\dot{x}$, $o\dot{y}$, $o\dot{v}$ (…) Then substituting $z + o\dot{z}$, $y + o\dot{y}$, $x + o\dot{x}$, $v + o\dot{v}$, instead of z, y, x, v; we shall have for a new Equation $zxy + yzo\dot{x} + zxo\dot{y} + y\dot{x}o\dot{z} + zoo\dot{x}\dot{y} + yoo\dot{z}\dot{x} + xoo\dot{z}\dot{y} + o^3\dot{z}\dot{y}\dot{x} = v + o\dot{v}$. From whence taking away the Original Equation $zxy = v$; there remains $yzo\dot{x} + zxo\dot{y} + yxo\dot{z} + zoo\dot{x}\dot{y} + yoo\dot{z}\dot{x} + xo^2\dot{z}\dot{y} + o^3\dot{x}\dot{y}\dot{x} = o\dot{v}$; that is, $yz\dot{x} + zx\dot{y} + yx\dot{z} + zo\dot{x}\dot{y} + yo\dot{z}\dot{x} + xo\dot{z}\dot{y} + oo\dot{z}\dot{y}\dot{x} = \dot{v}$; and making the Quantity o vanish, we have $yz\dot{x} + zx\dot{y} + yx\dot{z} = (\dot{v} =)$ the Fluxion of the Quantity propos'd. (Ditton, 1706: 57-58)

Seguint els dos enfocaments, el de L'Hospital (Leibniz) i el de *De quadratura* de Newton, es podria dir que s'arriba al mateix resultat, que ambdós algorismes són similars. Es pot constatar que, tot i traduir *dx* per fluxió de x ($\dot{x}$), Stone era conscient de la diferència entre els dos conceptes. De fet, segons Stone, tot i que els fonaments eren diferents, els dos mètodes no diferien a la pràctica: «this method [fent referència al de Leibniz] in the practice thereof, does not differ from that of fluxions» (Stone, 1730, «The translator to the reader»: XVIIJ). Així, la traducció de la regla del producte es pot considerar com un recurs pedagògic, malgrat la confusió conceptualment errònia entre diferència i fluxió.

Algunes reflexions finals

L'estudi de la regla del producte en els primers manuals del nou càlcul contribueix a entendre millor la interacció entre la formulació, la demostració i l'ensenyament dels conceptes a la primera meitat del segle XVIII. D'entrada, cal entendre la formulació i la demostració de la regla dins d'un determinat context històric: quines qüestions es plantejaven els autors dels manuals de càlcul diferencial, i quines eleccions havien de fer en relació amb les discussions contemporànies sobre la naturalesa del càlcul? Ja hem vist que els debats sobre la naturalesa de les quantitats infinitament petites i la demostració de la regla del producte en particular van tenir una gran influència sobre l'ensenyament del càlcul diferencial. Això és degut principalment a l'ús de recursos que podrien considerar-se com poc

acceptables des del punt de vista del rigor matemàtic a l'època, els quals, tanmateix, poden resultar ser molt profitosos des del punt de vista pedagògic, en ser més visuals i intuïtius. L'elecció dels recursos pedagògics il·lustra la tensió entre la preocupació pel rigor dels fonaments del càlcul i l'ensenyament dels seus principis, ja que calia explicar la desaparició de les quantitats infinitament petites d'alguna forma als principiants. En certa manera, la presentació pedagògica tendeix a dosificar l'afany de rigor dels fonaments a favor d'una millor comprensió.

El cas estudiat, *The method of fluxions* d'Edmund Stone, ajuda a comprendre l'ensenyament de la regla del producte en el context del mètode newtonià, des d'una altra perspectiva. Amb la seva traducció de l'*Analyse* de L'Hospital, Stone vol ensenyar el mètode newtonià a partir del mètode leibnizià, aprofitant la manera d'ensenyar, amb bona acollida en general, de L'Hospital. I ho fa encara que això impliqui fer servir una identificació conceptualment errònia, és a dir, de prendre la diferència dx per la fluxió $\dot{x}$. La traducció de Stone mostra com una identificació conceptual errònia pot funcionar com a recurs pedagògic: els dos sistemes (leibnizià i newtonià) resulten equivalents a la pràctica, tot i basar-se en principis fonamentals diferents.

Actualment, la derivada del producte de dues funcions és un dels primers resultats de càlcul diferencial que hom aprèn a batxillerat. La regla es demostra a partir de la definició de la derivada, tot manipulant els termes del numerador per arribar al resultat desitjat, d'una forma poc intuïtiva, massa abstracta per a algú que s'està iniciant en el càlcul diferencial. Per entendre la demostració de la derivada del producte de dues funcions, cal entendre primer l'evolució històrica soferta pel concepte central del càlcul diferencial. En els textos estudiats en aquesta contribució, la diferència es considera el concepte fonamental del càlcul. Pel que fa a la regla del producte, això implica abordar la qüestió de la naturalesa de quantitats infinitament petites i fins i tot posicionar-se. Amb Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) i Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) la diferència serà desplaçada per la derivada. La funció derivada, definida per Lagrange a partir de sèries com el coeficient diferencial de l'expressió $dy = f'(x)dx$, es converteix en l'objecte central del càlcul. Aleshores, Cauchy defineix la funció derivada $f'(x)$ d'una funció $f(x)$com el límit del quocient de les diferències. Els plantejaments de Lagrange i Cauchy, fonamentats sobre bases cada cop més analítiques, marquen el camí cap a la formulació definitiva del càlcul diferencial.

Sense voler generalitzar ni fer afirmacions categòriques, el càlcul diferencial s'ensenya tradicionalment d'una manera deductiva, a partir d'una col·lecció d'axiomes, teoremes i demostracions. Així, per exemple, la derivada del producte es presenta com un resultat «polit», quan en realitat és el final d'un procés històric, llarg i no lineal. Aquest tipus d'ensenyament tendeix a passar per alt els errors comesos, els dubtes i les idees errònies plantejades en el desenvolupament històric de les matemàtiques, i desvincula els problemes del seu context d'origen. Tanmateix, l'aprenentatge de les matemàtiques en general, i del càlcul diferencial en particular, rau en la comprensió de les motivacions dels problemes i preguntes plantejats en el moment de la seva gènesi. Reflexionar sobre certs aspectes del desenvolupament històric del càlcul diferencial pot aportar recursos pedagògics que, sense ser formalment rigorosos des del punt de vista matemàtic, poden ajudar a introduir certs conceptes a l'aula.

Agraïments

Vull donar les gràcies a la doctora Sandra Bella i a la doctora M. Rosa Massa-Esteve pels seus comentaris a versions preliminars d'aquest treball. Aquesta investigació ha comptat amb el suport del projecte PID2020-113702RB-I00.

Referències bibliogràfiques

Fonts primàries

Agnesi, Maria Gaetana (1748). *Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana*. Milà: Impressió privada. 2 v. [Traducció anglesa de Colson, J. (1801). *Analytical institutions, in four books*. Londres: Taylor and Wilks]

Crousaz, Jean-Pierre de (1721). *Commentaire sur l'analyse des infiniment petits*. París: Chez Montalant.

Ditton, Humphry (1706). *An institution of fluxions: Containing the first principles, the operations with some of the uses and applications of that admirable method*: *According to the scheme perfix'd to his of quadratures, by (its first inventor) the incomparable Sir Isaac Newton*. Londres: Imprimé par W. Botham, pour J. Knapton.

Euler, Leonhard (1755). *Institutiones calculi differentialis*. Berlín: Michaelis.

L'Hospital, Guillaume François A. de (1696). *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*. París: Imprimerie Royale.

Newton, Isaac (1704). *Tractatus de quadratura curvarum*. A: *Opticks: Or, a treatise of the refleixons, refractions, inflexions and colours of light*: *Also two treatises of the species and magnitude of curvilinear figures*. Londres: Samuel Smith et Benjamin Walford, p. 164-211.

Paulian, Aimé-Henri (1768). *Analyse des infiniment petits, suivie d'un nouveau commentaire pour l'intelligence des endroits les plus difficiles de cet ouvrage*. Avinyó: Chez la Veuve Girard et François Seguin.

Rondet, M. (1735). *Analyse des infiniment petits, comprenant le calcul integral dans toute son étenduë…* París: Chez Gandouin et Giffart.

Stone, Edmund (1730). *The method of fluxions both direct and inverse*: *The former being a translation from the celebrated Marquis de L'Hospital's* Analyse des infiniment petits*: And the latter supply'd by the translàtor*. Londres: For W. Innys. [Traducció francesa de Rondet, M. (1735). *Analyse des infiniment petits, comprenant le calcul integral dans toute son étenduë…* París: Chez Gandouin et Giffart]

Fonts secundàries

Bella, Sandra (2018). *De la géométrie et du calcul des infiniment petits: Les réceptions de l'algorithme leibnizien en France (1690-1706)* [en línia]. Tesi de doctorat. Nantes: Université de Nantes. <http://www.theses.fr/2018NANT4044> [Consulta: 9 desembre 2022].

Bella, Sandra; Blanco, Mònica (2018). «Comentaris sobre l'*Analyse des infiniment petits* de L'Hospital (1696-1768): interpretació i ensenyament de conceptes fonamentals del càlcul diferencial». A: Massa-Esteve, M. R.; Grapí, P. (ed.). *Actes de la XV Jornada sobre la Història de la Ciència i l'Ensenyament «Antoni Quintana i Marí»*. Barcelona: Institut d'Estudis Catalans. Societat Catalana d'Història de la Ciència i de la Tècnica, p. 49-56.

Berenguer, Joaquim (2021). «Introducing differential calculus in Spain: The fluxion of the product and the quadrature of curves by Tomàs Cerdà». *British Journal for the History of Mathematics*, 36 (1), p. 23-49.

Blanco, Mònica (2015). «On gardeners, dukes and mathematical instruments». *Bulletin of the Scientific Instrument Society*, 125, p. 22-28.

Blay, Michel (1986). «Deux moments de la critique du calcul infinitésimal: Michel Rolle et George Berkeley». *Revue d'Histoire des Sciences*, 39, p. 223-253.

Guicciardini, Niccolò (1989). *The development of Newtonian calculus in Britain, 1700-1800*. Cambridge: Cambridge University Press.

Mancosu, Paolo (1989). «The metaphysics of the calculus: A foundational debate in the Academy of Sciences, 1700-1706». *Historia Mathematica*, 16, p. 224-248.